

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considera les matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcula'n els determinants: $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{B})$. (2 punts)
- (b) Calcula la matriu producte $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, la matriu transposada $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^t$. (3 punts)
- (c) Perquè es compleixi la relació $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, quantes files i columnes ha de tenir la matriu \mathbf{X} ? (2 punts)
- (d) Calcula la matriu \mathbf{X} que satisfà la relació (3 punts)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

2. Una empresa fabrica tres tipus de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diàriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diàriament.

- (a) Si $\lambda = 2$, i aquesta empresa usa, diàriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:
 - (i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)
 - (ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)
- (b) Si $\lambda = 3$, i l'empresa fabrica diàriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)
En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

3. Considera la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ b & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Estudia la continuïtat de la funció f als punts $x_0 \neq 0$. (3 punts)
- (b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre a i b perquè f sigui una funció contínua al punt $x_0 = 0$. (5 punts)
- (c) Si per als valors de $a = 2$ i $b = 1$, f és una funció derivable al punt $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 punts)
4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, t , expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2},$$

on la variable real $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

- (a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)
- (b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurà l'any del mínim? (4 punts)
- (c) Calcula la grandària de la població, això és el nombre d'individus, que hi haurà a llarg termini. (4 punts)
5. Donades les rectes

$$\text{(I)} \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, \\ x = 2z + 3, \end{cases}$$

- (a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)
- (b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I). (3 punts)
- (c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt $(-1, 0, 2)$. (3 punts)
- (d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

6. Donats els punts

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, 1, 0), \quad \text{i} \quad R = (0, 1, 1).$$

- (a) Comprova que P , Q i R no estan alineats. (2 punts)
 - (b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P , Q i R . (3 punts)
 - (c) Calcula l'àrea del triangle que té per vèrtexs P , Q i R . (3 punts)
 - (d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a , b i c perquè els punts P , Q , R i $S = (a, b, c)$ pertanyin a un mateix pla. (2 punts)
7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:
- (a) \mathbf{A} = "les dues bolles són vermelles" (2 punts)
 - (b) \mathbf{B} = "les dues bolles són del mateix color" (3 punts)
 - (c) \mathbf{C} = "almenys una bolla és vermella" (3 punts)
 - (d) \mathbf{D} = "cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)
8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 *cm* i desviació típica 10 *cm*. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:
- (a) sobrepassi els 170 *cm*. (3 punts)
 - (b) sigui menor que 155 *cm*. (3 punts)
 - (c) estigui compresa entre 155 *cm* i 170 *cm* (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$